

# Monodromía de Familias de Variedades

Adán Medrano Martín del Campo

University of Chicago

Seminario Nacional de Geometría Algebraica (en  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ )

2 de diciembre de 2020

# Objetivos

- ▶ Monodromía de una familia de variedades

# Objetivos

- ▶ Monodromía de una familia de variedades
- ▶ Ejemplos

# Objetivos

- ▶ Monodromía de una familia de variedades
- ▶ Ejemplos
- ▶ Cálculo explícito de una familia de superficies cúbicas

# Una fibración elíptica sobre $\mathbb{P}^1$

# Una fibración elíptica sobre $\mathbb{P}^1$

Para  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ :

$$S_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\}$$

# Una fibración elíptica sobre $\mathbb{P}^1$

Para  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ :

$$S_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\}$$

$$\overline{S_\lambda} = C_\lambda \cong T^2$$

# Una fibración elíptica sobre $\mathbb{P}^1$

Para  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ :

$$S_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\}$$

$$\overline{S_\lambda} = C_\lambda \cong T^2$$

$$\begin{array}{ccc} C_\lambda & \hookrightarrow & E & & \{(\lambda, p) \mid p \in C_\lambda\} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} & & \lambda \end{array}$$



# $C_\lambda$ como cubierta ramificada de $\mathbb{P}^1$

$$S_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \quad C_\lambda = \overline{S_\lambda}$$

# $C_\lambda$ como cubierta ramificada de $\mathbb{P}^1$

$$S_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \quad C_\lambda = \overline{S_\lambda}$$

$$\begin{array}{ccc} \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \curvearrowright & C_\lambda \quad (x, y) \\ & & \downarrow f \\ & & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ x \end{array}$$

# $C_\lambda$ como cubierta ramificada de $\mathbb{P}^1$

$$S_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \quad C_\lambda = \overline{S_\lambda}$$

$$\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright C_\lambda \quad (x, y)$$
$$\begin{array}{ccc} \downarrow f & \downarrow & \sigma(x, y) = (x, -y) \\ \mathbb{P}^1 & x & \end{array}$$

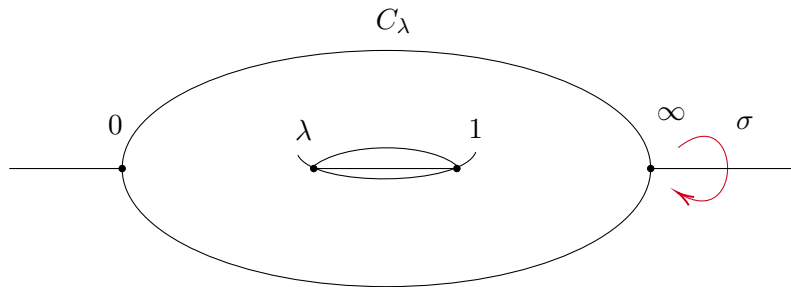
# $C_\lambda$ como cubierta ramificada de $\mathbb{P}^1$

$$S_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \quad C_\lambda = \overline{S_\lambda}$$

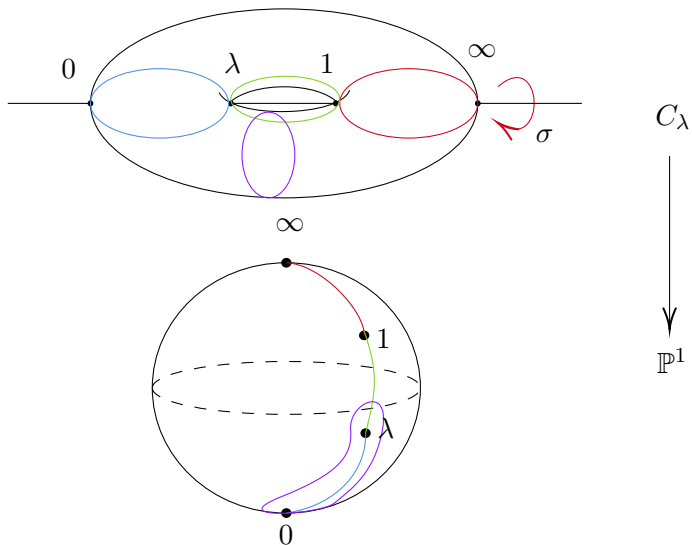
$$\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright C_\lambda \quad (x, y)$$
$$\begin{array}{ccc} \downarrow f & \downarrow & \sigma(x, y) = (x, -y) \\ \mathbb{P}^1 & x & \end{array}$$

$$\text{Fix}(\sigma) = f^{-1}(\{0, 1, \lambda, \infty\})$$

# Involución en $C_\lambda$



# $\mathbb{P}^1$ como cociente de $C_\lambda$



# Homomorfismo de monodromía

$$\begin{array}{ccc} C_\lambda & \hookrightarrow & E \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \end{array}$$

# Homomorfismo de monodromía

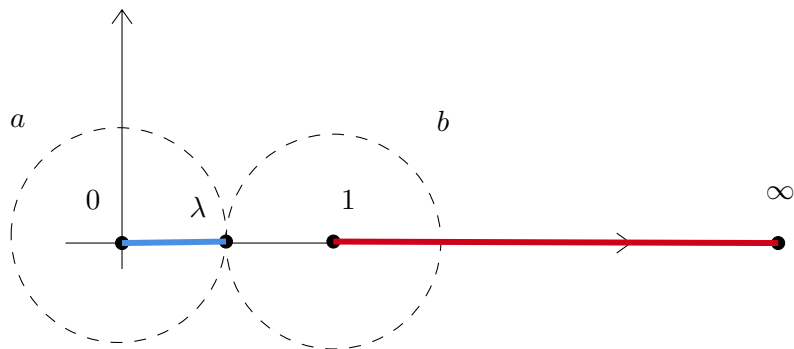
$$\begin{array}{ccc} C_\lambda & \hookrightarrow & E \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \end{array} \rightsquigarrow \rho : \pi_1 (\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}) \rightarrow \text{Aut} (H_1 (C_\lambda; \mathbb{Z}))$$

**Monodromía**

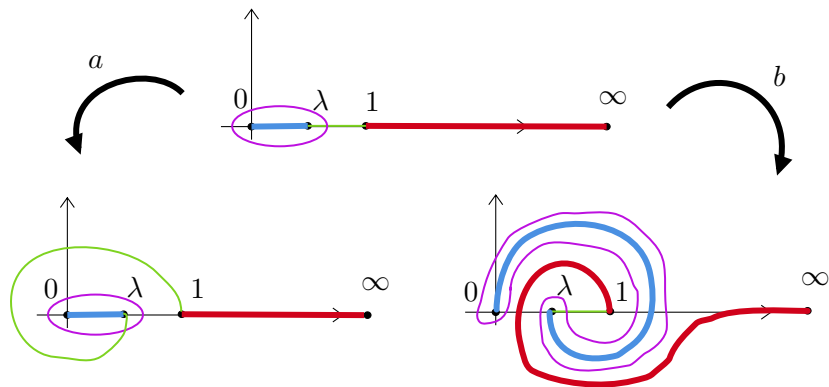


# Generadores de $\pi_1$

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, \frac{1}{2}) \cong \langle a, b \rangle$$



# Acción de los generadores



## Imagen de $\rho$

Con respecto a nuestra base de  $H_1(C_\lambda; \mathbb{Z})$ :

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

## Imagen de $\rho$

Con respecto a nuestra base de  $H_1(C_\lambda; \mathbb{Z})$ :

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\text{Im}(\rho) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \text{Im}(\rho)] = 12$$

# Espacios de hipersuperficies proyectivas suaves

# Hipersuperficies en $\mathbb{P}^n$

$$f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$$

# Hipersuperficies en $\mathbb{P}^n$

$$f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d \quad \rightsquigarrow \quad V(f) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid f(x) = 0\}$$

# Hipersuperficies en $\mathbb{P}^n$

$$f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d \quad \rightsquigarrow \quad V(f) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid f(x) = 0\}$$

$$\mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1} = \{V(f) \subset \mathbb{P}^n \mid f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d\}$$

$$[a_i] \mapsto V\left(\sum_i a_i x^i\right)$$



# Los complementos $\mathcal{U}_{n,d}$

La variedad discriminante

$$\{f \text{ singular}\} = \Delta_{n,d} \subset \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$$

# Los complementos $\mathcal{U}_{n,d}$

La variedad discriminante

$$\{f \text{ singular}\} = \Delta_{n,d} \subset \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$$

$$\mathcal{U}_{n,d} = \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1} \setminus \Delta_{n,d}$$

# Los complementos $\mathcal{U}_{n,d}$

La variedad discriminante

$$\{f \text{ singular}\} = \Delta_{n,d} \subset \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$$

$$\mathcal{U}_{n,d} = \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1} \setminus \Delta_{n,d}$$

¿Qué puede decirse sobre  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,d})$ ?

# Grupo fundamental de $\mathcal{U}_{n,d}$

(Lonne) Presenta cada  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,d})$  con  $(d-1)^n$  generadores.

# Grupo fundamental de $\mathcal{U}_{n,d}$

**(Lonne)** Presenta cada  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,d})$  con  $(d-1)^n$  generadores.

▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,1}) \cong \pi_1(\mathbb{P}^n) \cong 0$

# Grupo fundamental de $\mathcal{U}_{n,d}$

**(Lonne)** Presenta cada  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,d})$  con  $(d-1)^n$  generadores.

- ▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,1}) \cong \pi_1(\mathbb{P}^n) \cong 0$
- ▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,2}) \cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$

# Grupo fundamental de $\mathcal{U}_{n,d}$

**(Lonne)** Presenta cada  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,d})$  con  $(d-1)^n$  generadores.

- ▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,1}) \cong \pi_1(\mathbb{P}^n) \cong 0$
- ▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,2}) \cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$
- ▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{1,d}) \cong \pi_1(\text{Conf}_d(\mathbb{P}^1)) \cong B_d(S^2)$

# Grupo fundamental de $\mathcal{U}_{n,d}$

**(Lonne)** Presenta cada  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,d})$  con  $(d-1)^n$  generadores.

- ▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,1}) \cong \pi_1(\mathbb{P}^n) \cong 0$
- ▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,2}) \cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$
- ▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{1,d}) \cong \pi_1(\text{Conf}_d(\mathbb{P}^1)) \cong B_d(S^2)$

**(Dolgachev-Libgober)**

$$\pi_1(\mathcal{U}_{2,3}) \cong \mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

donde  $\mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$  es el grupo de Heissenberg módulo 3.



# La familia universal $E_{n,d}$

$$\begin{array}{ccc} V(f) \hookrightarrow E_{n,d} & & \{(f, x) \mid x \in V(f)\} \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \mathcal{U}_{n,d} & f \end{array}$$

# La familia universal $E_{n,d}$

$$\begin{array}{ccc} V(f) \hookrightarrow E_{n,d} & & \{(f, x) \mid x \in V(f)\} \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \mathcal{U}_{n,d} & f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{n,d}) \rightarrow \text{Aut}(H_{n-1}(V(f); \mathbb{Z}))$$

¿Cuál es la imagen de este homomorfismo?

$$\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{n,d}) \rightarrow \text{Aut}(H_{n-1}(V(f); \mathbb{Z}))$$

¿Cuál es la imagen de este homomorfismo?

$$\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{n,d}) \rightarrow \text{Aut}(H_{n-1}(V(f); \mathbb{Z}))$$

- ▶ (Ebeling) Si  $n$  es impar:

$$\text{Im}(\rho) = O_h^+(H_{n-1}(V(f); \mathbb{Z}))$$

¿Cuál es la imagen de este homomorfismo?

$$\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{n,d}) \rightarrow \text{Aut}(H_{n-1}(V(f); \mathbb{Z}))$$

- ▶ (Ebeling) Si  $n$  es impar:

$$\text{Im}(\rho) = \text{O}_h^+(H_{n-1}(V(f); \mathbb{Z}))$$

- ▶ (Janssen) Si  $n$  es par:

$$\text{Im}(\rho) = \begin{cases} \text{Sp}(H_{n-1}(V(f); \mathbb{Z})) & \text{si } d \text{ es par} \\ \text{SpO}(H_{n-1}(V(f); \mathbb{Z}), q_{V(f)}) & \text{si } d \text{ es impar} \end{cases}$$

# Monodromía de $E_{3,3}$

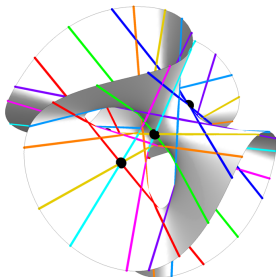
**(Klein-Jordan)**

$$\text{Im}(\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{3,3}) \rightarrow \text{Aut}(H_2(V(f); \mathbb{Z}))) \cong W(E_6)$$

# Monodromía de $E_{3,3}$

(Klein-Jordan)

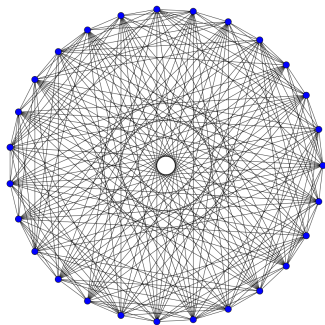
$$\text{Im}(\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{3,3}) \rightarrow \text{Aut}(H_2(V(f); \mathbb{Z}))) \cong W(E_6)$$



Automorfismos de las 27 líneas en una superficie cúbica suave.

# Monodromía de $E_{3,3}$

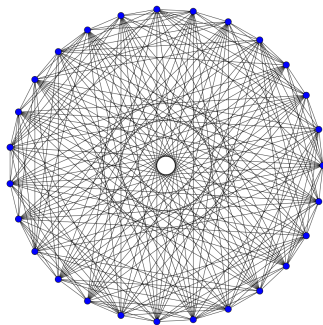
Gráfica de Schläfli  $\Gamma$





# Monodromía de $E_{3,3}$

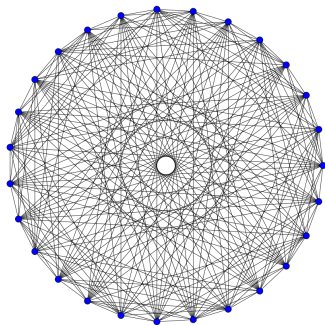
Gráfica de Schläfli  $\Gamma$



$$\text{Aut}(\Gamma) \cong W(E_6) \quad |W(E_6)| = 51840$$

# Monodromía de $E_{3,3}$

Gráfica de Schläfli  $\Gamma$



$$\text{Aut}(\Gamma) \cong W(E_6) \quad |W(E_6)| = 51840$$

Da la intersección de las 27 líneas en una superficie cúbica suave.

# Familias de cubiertas ramificadas

# Ramificación sobre $V(f)$

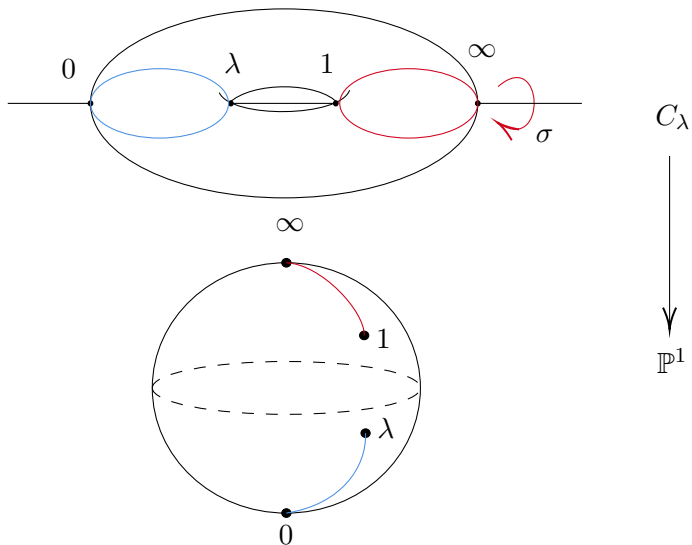
$$\begin{array}{ccc} V(f) \setminus X_f & \hookrightarrow & \mathcal{E}_{n,d} & \{(f,p) \mid p \in X_f\} \\ & & \downarrow & \downarrow \\ & & \mathcal{U}_{n,d} & f \end{array}$$

# Ramificación sobre $V(f)$

$$\begin{array}{ccc} V(f) \times X_f \hookrightarrow \mathcal{E}_{n,d} & \{(f,p) \mid p \in X_f\} & X_f \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow k \\ \mathcal{U}_{n,d} & f & \mathbb{P}^n \supset V(f) \end{array}$$

## El caso más sencillo: Cubiertas cíclicas de $\mathbb{P}^1$

# Ejemplo previo: Cubierta de grado 2 sobre 4 puntos



# Cubiertas cíclicas de $\mathbb{P}^1$

(McMullen) *Braid Groups and Hodge Theory*



# Cubiertas cíclicas de $\mathbb{P}^1$

(McMullen) *Braid Groups and Hodge Theory*

$$X_f = \{y^d = f(x)\} \subset \mathbb{C}^2 \quad f \text{ libre de cuadrados}$$

# Cubiertas cíclicas de $\mathbb{P}^1$

(McMullen) *Braid Groups and Hodge Theory*

$$X_f = \{y^d = f(x)\} \subset \mathbb{C}^2 \quad f \text{ libre de cuadrados}$$

(Riemann-Hurwitz)

$$g(X_f) = \frac{1}{2}(d-1)(n-2)$$

# Cubiertas cíclicas de $\mathbb{P}^1$

(McMullen) *Braid Groups and Hodge Theory*

$$X_f = \{y^d = f(x)\} \subset \mathbb{C}^2 \quad f \text{ libre de cuadrados}$$

(Riemann-Hurwitz)

$$g(X_f) = \frac{1}{2}(d-1)(n-2)$$

$$\rho : \pi_1(\text{Conf}_n(\mathbb{C})) \cong B_n \rightarrow \text{Aut}(H^1(X_f; \mathbb{Z}))$$

# Cubiertas ramificadas sobre curvas cúbicas en $\mathbb{P}^2$

# Cubiertas de grado $d = 3$

**(Hirzebruch)** Para  $n = 2$

$$\text{Existe } X_f \iff k \mid \deg(f).$$

# Cubiertas de grado $d = 3$

**(Hirzebruch)** Para  $n = 2$

Existe  $X_f \iff k \mid \deg(f)$ .

$$\begin{array}{c} X_f \\ \downarrow k \\ \mathbb{P}^2 \end{array}$$

# Cubiertas de grado $d = 3$

**(Hirzebruch)** Para  $n = 2$

Existe  $X_f \iff k \mid \deg(f)$ .

$$\begin{array}{c} X_f \\ \downarrow k \\ \mathbb{P}^2 \end{array} \implies k \mid 3$$

# Cubiertas de grado $d = 3$

**(Hirzebruch)** Para  $n = 2$

Existe  $X_f \iff k \mid \deg(f)$ .

$$\begin{array}{c} X_f \\ \downarrow k \\ \mathbb{P}^2 \end{array} \implies k \mid 3$$

$$V(f) \subset \mathbb{P}^2$$



# Cubiertas de grado $d = 3$

**(Hirzebruch)** Para  $n = 2$

Existe  $X_f \iff k \mid \deg(f)$ .

$$\begin{array}{c} X_f \\ \downarrow k \\ \mathbb{P}^2 \end{array} \implies k \mid 3$$

$$V(f) \subset \mathbb{P}^2 \rightsquigarrow X_f \cong V(w^3 - f) \subset \mathbb{P}^3$$

# Monodromía de $\mathcal{E}_{2,3}$

$$\begin{array}{ccc} V(w^3 - f) \hookrightarrow \mathcal{E}_{2,3} & \{(f, p) \mid p \in V(w^3 - f)\} & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \mathcal{U}_{2,3} & f & \end{array}$$

# Monodromía de $\mathcal{E}_{2,3}$

$$\begin{array}{ccc} V(w^3 - f) \hookrightarrow \mathcal{E}_{2,3} & \{(f, p) \mid p \in V(w^3 - f)\} \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{U}_{2,3} & f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{2,3}) \rightarrow \text{Aut}(H^2(V(w^3 - f); \mathbb{Z}))$$

# Monodromía de $\mathcal{E}_{2,3}$

$$\begin{array}{ccc} V(w^3 - f) \hookrightarrow \mathcal{E}_{2,3} & \{(f, p) \mid p \in V(w^3 - f)\} \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{U}_{2,3} & f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{2,3}) \rightarrow \text{Aut}(H^2(V(w^3 - f); \mathbb{Z})) \quad \text{Im}(\rho) \subset W(E_6)$$

# Monodromía de $\mathcal{E}_{2,3}$

$$\begin{array}{ccc} V(w^3 - f) \hookrightarrow \mathcal{E}_{2,3} & \{(f, p) \mid p \in V(w^3 - f)\} \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{U}_{2,3} & f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{2,3}) \rightarrow \text{Aut}(H^2(V(w^3 - f); \mathbb{Z})) \quad \text{Im}(\rho) \subset W(E_6)$$

$$\rho \text{ preserva la } \begin{cases} \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2} & \text{forma de intersección} \\ K_{X_f} & \text{clase canónica} \end{cases}$$

# Acción del grupo de Deck $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle \Omega \rangle \curvearrowright H^2(V(w^3 - f); \mathbb{Z})$$
$$\Omega : [w \mapsto \omega^{-1}w] \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

# Acción del grupo de Deck $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle \Omega \rangle \curvearrowright H^2(V(w^3 - f); \mathbb{Z})$$
$$\Omega : [w \mapsto \omega^{-1}w] \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$\text{Im}(\rho) \subset C_{W(E_6)}(\Omega)$$

# Acción del grupo de Deck $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle \Omega \rangle \curvearrowright H^2(V(w^3 - f); \mathbb{Z})$$
$$\Omega : [w \mapsto \omega^{-1}w] \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$\text{Im}(\rho) \subset C_{W(E_6)}(\Omega)$$

$$|C_{W(E_6)}(\Omega)| = 648 \quad |W(E_6)| = 51840$$



# Teorema principal

(Medrano Martín del Campo)

$$\mathrm{Im}(\rho) \cong \mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong C_{W(E_6)}(\Omega).$$

Una bella correspondencia cúbica:  
Líneas en  $X_f$  y puntos de inflexión de  $V(f)$

## Tangentes en los puntos de inflexión de $f$

$$V(f) \cap V(\det \text{Hess}(f)) = I_f \quad |I_f| = 9$$

## Tangentes en los puntos de inflexión de $f$

$$V(f) \cap V(\det \text{Hess}(f)) = I_f \quad |I_f| = 9$$

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} & f_{zx} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

## Tangentes en los puntos de inflexión de $f$

$$V(f) \cap V(\det \text{Hess}(f)) = I_f \quad |I_f| = 9$$

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} & f_{zx} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

$$P \in I_f$$

## Tangentes en los puntos de inflexión de $f$

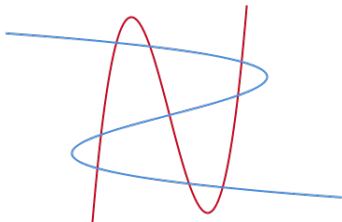
$$V(f) \cap V(\det \text{Hess}(f)) = I_f \quad |I_f| = 9$$

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} & f_{zx} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

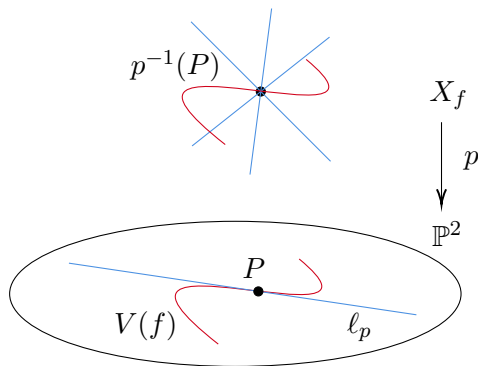
$$P \in I_f \quad \rightsquigarrow \quad \ell_P = V(\ker \nabla f_P) \subset \mathbb{P}^2$$

## Tangentes en los puntos de inflexión de $f$

$$|I_f| = |V(f) \cap V(\det \text{Hess}(f))| = 9$$



## Correspondencia 3 : 1 de líneas



$$p^{-1}(\ell_P) = \{3 \text{ líneas por } p^{-1}(P)\} \subset X_f$$



## Correspondencia 3 : 1 de líneas

$$\{27 \text{ líneas en } V(w^3 - f)\} \xleftrightarrow{3:1} \{\ell_P \mid P \in I_f\}$$

## Correspondencia 3 : 1 de líneas

$$\{27 \text{ líneas en } V(w^3 - f)\} \xleftarrow{3:1} \{\ell_P \mid P \in I_f\}$$

- $a \in \pi_1(\mathcal{U}_{2,3}) \rightsquigarrow$  Permutación de  $P \in I_f$
- $\rightsquigarrow$  Permutación de  $\ell_P \subset \mathbb{P}^2$
- $\rightsquigarrow$  Permutación de las 27 líneas en  $V(w^3 - f)$
- $\rightsquigarrow \rho(a)$

## Cálculo de $\text{Im}(\rho)$

## Dos tipos de elementos en $\pi_1(\mathcal{U}_{2,3})$

(Dolgachev-Libgober) Extensión central

$$1 \rightarrow \mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{U}_{2,3}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow 1$$

# Dos tipos de elementos en $\pi_1(\mathcal{U}_{2,3})$

(Dolgachev-Libgober) Extensión central

$$1 \rightarrow \mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{U}_{2,3}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow 1$$

$$a \in \pi_1(\mathcal{U}_{2,3}) \begin{cases} \text{Aritmético} & a \in \mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \\ \text{Geométrico} & a \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \end{cases}$$

## Dos tipos de elementos en $\pi_1(\mathcal{U}_{2,3})$

(Dolgachev-Libgober) Extensión central

$$1 \rightarrow \mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{U}_{2,3}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow 1$$

$$a \in \pi_1(\mathcal{U}_{2,3}) \begin{cases} \text{Aritmético} & a \in \mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \\ \text{Geométrico} & a \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \end{cases}$$

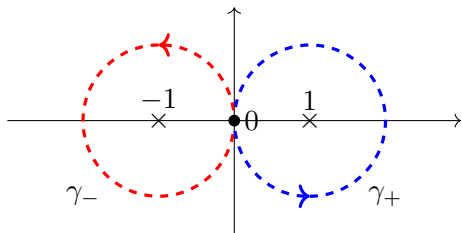
$$\rho(\mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})) \cong \mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad \rho(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

## Generando $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) < \text{Im}(\rho)$

$$f_\lambda = y^2z - (x - z)(x + z)(x - \lambda z) \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$$

# Generando $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) < \text{Im}(\rho)$

$$f_\lambda = y^2 z - (x - z)(x + z)(x - \lambda z) \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$$



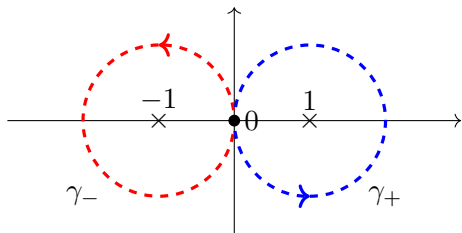
$$\gamma_- : t \mapsto -1 + e^{2\pi it}$$

$$\gamma_+ : t \mapsto 1 - e^{2\pi it}$$



## Generando $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) < \text{Im}(\rho)$

$$f_\lambda = y^2 z - (x - z)(x + z)(x - \lambda z) \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$$



$$\gamma_- : t \mapsto -1 + e^{2\pi it}$$

$$\gamma_+ : t \mapsto 1 - e^{2\pi it}$$

$$\langle \rho(\gamma_-), \rho(\gamma_+) \rangle = \langle G_1, G_2 \rangle \cong SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

# Generando $\mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) < \text{Im}(\rho)$

La forma Hessiana

$$f_0 \rightsquigarrow f_H = x^3 + y^3 + z^3 - 3\mu xyz$$

## Generando $\mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) < \text{Im}(\rho)$

La forma Hessiana

$$f_0 \rightsquigarrow f_H = x^3 + y^3 + z^3 - 3\mu xyz$$

$$\mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \curvearrowright V(w^3 - f_H)$$

$$\mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \langle X, Y \rangle \quad X, Y \in \text{PSL}_4(\mathbb{C})$$

## Generando $\mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) < \text{Im}(\rho)$

La forma Hessiana

$$f_0 \rightsquigarrow f_H = x^3 + y^3 + z^3 - 3\mu xyz$$

$$\mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \curvearrowright V(w^3 - f_H)$$

$$\mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \langle X, Y \rangle \quad X, Y \in \text{PSL}_4(\mathbb{C})$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Generando $\mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) < \text{Im}(\rho)$

La forma Hessiana

$$f_0 \rightsquigarrow f_H = x^3 + y^3 + z^3 - 3\mu xyz$$

$$\mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \curvearrowright V(w^3 - f_H)$$

$$\mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \langle X, Y \rangle \quad X, Y \in \text{PSL}_4(\mathbb{C})$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \rho(X), \rho(Y) \rangle = \langle H_1, H_2 \rangle \cong \mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

# Teorema principal

(Medrano Martín del Campo)

$$\mathrm{Im}(\rho) \cong \mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong C_{W(E_6)}(\Omega).$$

# Teorema principal

(Medrano Martín del Campo)

$$\mathrm{Im}(\rho) \cong \mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong C_{W(E_6)}(\Omega).$$

Para más detalles, ver:

*Monodromy of the family of cubic surfaces branching over smooth cubic curves*